Resolución de problemas minimizando ángulos de gradientes. Teoremas y Algoritmos de LAEF.

Lázaro A. Escudero Ferrer.

15 de enero de 2002

Observación 0.0.1 *Las definiciones, propiedades, teoremas y algoritmos a las que les he puesto el nombre de LAEF, ha sido por que los he inventado, enunciado y/o demostrado yo, y hay que hacerle un exhaustivo control por si hay errores.*

Capítulo 1

Teorema de LAEF.

1.1 Preliminares.

Problema tipo (P_n):

$$\begin{cases} Max < c, x > \\ S.a: \;\; x \in M \end{cases}$$

Donde M es un conjunto de m restricciones del tipo $r_i \equiv < \vec{a}_i, x > \leq z_i$. Donde $c \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^m$ y $A \in \mathcal{M}_{mxn}$ y con el conjunto factible M acotado.

Definición 1.1.1 *Se define el conjunto solución $S \subset \mathbb{R}^n$ del problema (P_n) como el conjunto factible $(S \subset M)$ tal que para todo $\bar{x} \in S$, $\bar{x}$ es máximo para la función $< c, x >$.*

$$S \subset M \;\; Solución \;\; \Leftrightarrow: \forall \bar{x} \in S \;\; < c, \bar{x} > \geq < c, x > \;\; \forall x \in M$$

Definición 1.1.2 *(LAEF). Se dice que un punto $\bar{x}$ es extremo si es factible $(\bar{x} \in M)$ y es el único punto intersección de al menos n restricciones con signo de igualdad, es decir:*

$$\bar{x} = \bigcap_{i=1}^{r} \{< \vec{a}_i, x >= z_i\} \;\; con \;\; r \geq n$$

$$\bar{x} \;\; extremo \;\; \Leftrightarrow: \left\{ \bar{x} \in M \;\; y \;\; \bar{x} = \bigcap_{i=1}^{r} \{< \vec{a}_i, x >= z_i\} \;\; con \;\; r \geq n \right\}$$

Observación 1.1.1 *El conjunto solución S siempre está contenido en la frontera de M y, o bien $S = \emptyset$ o bien tiene un punto extremo.*

Observación 1.1.2 *(LAEF). Si las variables son no negativas entonces la matríz de gradientes de las restricciones A es de la forma:*

$$A = \left(\frac{A'}{-I_n} \right)$$

Definición 1.1.3 *(LAEF). Se dice que una restricción r_i es inútil cuando al quitarla el conjunto factible M no sufre ningún cambio.*

$$r_i \;\; inútil \;\; \Leftrightarrow: M \equiv M - \{r_i\}$$

Se dice que una restricción es útil cuando no es inútil.

Proposición 1.1.1 *(Caracterización de restricciones útiles e inútiles).(LAEF). Sea r_u una restricción útil, entonces:*

$$r_u \cap \delta M = \delta r_u \cap M \subset L$$

Con L variedad afín de $dim(L) = n - 1$, (en realidad L es $< \vec{a}_u, x >= z_u \equiv \delta r_u$, pero lo que importa es la dimensión).

Además en este caso existen n puntos extremos $\bar{x}_i$ distintos dos a dos que generan L.

$$\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\} \subset r_u \cap \delta M \subset L$$

Sea r_h una restricción inútil, entonces:

$$r_u \cap \delta M = \delta r_u \cap M \subset L$$

Con L variedad afín con $dim(L) \leq n - 2$.

Definición 1.1.4 *(LAEF). Se definen las restricciones útiles adyacentes como las restricciones que tienen por intersección un punto extremo del problema.*

Proposición 1.1.2 *(LAEF). En un problema (P_2) en $\mathbb{R}^2$, los ángulos que forman los gradientes de las restricciones útiles adyacentes dos a dos suman 360^o.*

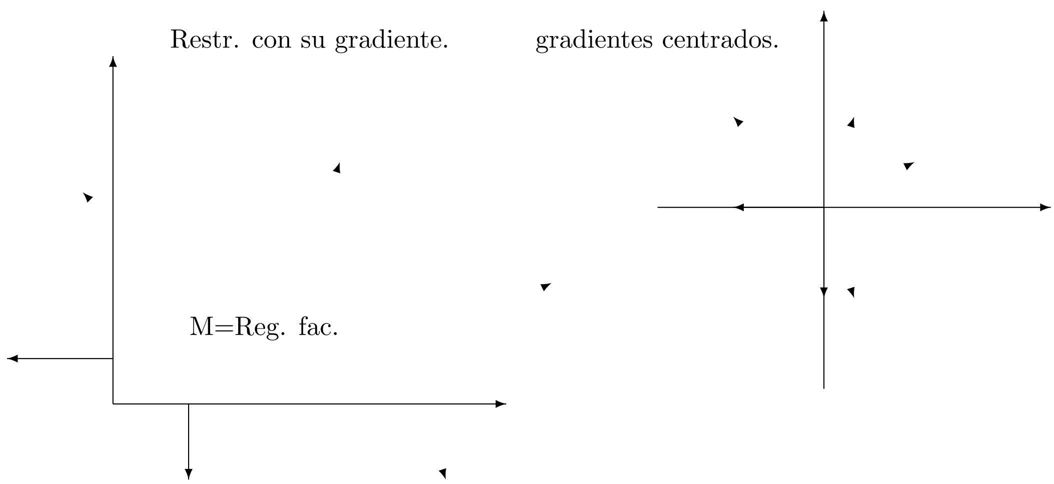
Además todos estos ángulos están comprendidos entre 0^o y 180^o, $0 < \alpha < 180$.

Demostración:

Es elemental, sólo hay que ver una gráfica de M, dibujar los gradientes de las restricciones útiles con origen el $(0, 0)$ y sumar los ángulos.

Sea $\bar{x} = \delta r_i \cap \delta r_j$, $x \in M \cap \delta r_i$ e $y \in M \cap \delta r_j$, Como x e y están en dos restricciones distintas, son tres puntos no alineados, luego forman un triángulo y por tanto el ángulo que forman, al igual que todos los ángulos de todos los triángulos planos, está comprendido entre 0^0 y 180^0.

■ **c.q.d.**



Corolario 1.1.1 *(Caracterización de restricciones adyacentes).(LAEF). Dada una restricción r_i, la restricción cuyo gradiente forma el menor ángulo en sentido positivo y negativo, con el gradiente de r_i es una restricción adyacente.*

Definición 1.1.5 *Dados dos vectores v, u en $\mathbb{R}^n$, se define el coseno del menor ángulo que forma como:*

$$Coseno(v,u) = \frac{< v, u >}{\|v\|.\|u\|}$$

Proposición 1.1.3 *(Lema de Zorn. Caso finito). Sea A un conjunto finito y acotado con una relación de orden $\leq$, entonces A tiene un elemento maximal en el conjunto.*

(LAEF).

Demostración:

Por inducción en el cardinal de A, $|A| = n$.

Si $n = 1$, entonces $A = \{a\}$, entonces a es maximal y $a \in A$.

Suponemos que es cierto para $|A| = n - 1$. Sea $|A| = n$, entonces $A = \{a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$. Si a_n es maximal ya está. Si a_n no es maximal, por hipótesis de inducción sabemos que el conjunto $A' = \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ que tiene cardinal $n - 1$ tiene un elemento maximal a_i y además $a_i \in A$. Si $a_i \leq a_n$ entonces a_n es maximal, contradición. Si $a_n \leq a_i$ entonces a_i es maximal de A.

$\blacksquare$ **c.q.d.**

Esto se aplica para que $(*)$ del Teorema de LAEF tenga elementos máximos.

1.2 Teorema de LAEF.

Teorema de LAEF.

Dado el problema tipo (P_n):

$$\begin{cases} Max < c, x > \\ S.a: \quad x \in M \end{cases}$$

Donde M es un conjunto de m restricciones del tipo $r_i \equiv < \vec{a}_i, x > \leq z_i$. Donde $c \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^m$ y $(a_{ij}) = A \in \mathcal{M}_{mxn}$ y con el conjunto factible acotado.

Sea la tabla:

Restricciones	Gradiente
$\{r_i\}_{i \in \underline{m}}$	$\{\vec{a}_i \equiv (a_i^1, a_i^2, \ldots, a_i^n)\}_{i \in \underline{m}}$

Y sea f tal que:

$$\frac{< c, \vec{a}_f >}{\|\vec{a}_f\|} = Max \left\{ \frac{< c, \vec{a}_j >}{\|\vec{a}_j\|} : \vec{a}_j \in Gradiente, \ j \in \underline{m}, \ r_j \text{ útil} \right\} \quad (*)$$

Entonces el conjunto óptimo S del problema está contenido en $\{< \vec{a}_f, x >= z_f\}$.

Más aún, si f en lugar de ser un escalar (índice) es un conjunto de varios índices, entonces el conjunto óptimo S está contenido en la intersección de todas las restricciones de índices de f, es decir,

$$S \in \bigcap_{j \in f} \{< \vec{a}_j, x >= z_j\}$$

Demostración:

Si $M = \emptyset$ el resultado es trivial, suponemos que $M \neq \emptyset$.

Por inducción sobre n la dimensión del espacio:

Para $n = 1$ está claro: el problema es del tipo:

$$\begin{cases} Max: \quad cx \\ S.a: \quad +ax \leq z_1 \quad (a > 0) \\ \qquad\quad -bx \leq z_2 \quad (b > 0) \end{cases}$$

Los gradientes de las restricciones o son positivos o negativos, el que coincida con el signo de c es el máximo de la función $(*)$ (el otro es negativo) y está claro que es la restricción (si es útil) donde está la solución (que en este caso la restricción con igualdad es la propia solución).

Para $n = 2$ sólo es el método gráfico, haciendo mover la recta de costes (desde muy lejos) hacia la región factible el primer punto donde se corta es la solución, veamos que está en la restricción que cumple $(*)$.

Sea $\bar{x}$ el punto óptimo.

Sea f verificando $(*)$ para (P_2).

En un conjunto convexo en $\mathbb{R}^2$ formado por restricciones como las de M (poligonal), cada punto extremo es intersección de dos restricciones útiles. Sea $\bar{x} \in \delta r_t \cap \delta r_u$.

Centramos los gradientes en el origen y ponemos c, c caerá encima de un vector $\vec{a}_f$ o en medio de dos vectores $\vec{a}_t$ y $\vec{a}_u$, pues bien, uno de estos es el más cercano y por tanto el que tiene un ángulo menor con

c, entonces $f = t$ ó $f = u$ donde f verifica $(*)$.

Hemos visto que el resultado se verifica para $n = 1$ y $n = 2$ veamos que también se verifica para $n \geq 3$.

Suponemos que es cierto para n-1:

Por la Obs. 1.1.1 sabemos que hay solución óptima de nuestro problema P_n y además sabemos que contiene a un punto extremo.

Sea c el vector gradiente de la función objetivo.

Sea $\bar{x}$ la solución de nuestro problema (que sabemos que existe).

Sea $\vec{a}_f$ el gradiente de la restricción que verifica $(*)$ del problema (P_n).

Sea V un hiperplano afín (espacio afín de dimensión $n-1$ de $\mathbb{R}^n$) que contenga a: $\bar{x}$ como punto y a $\vec{a}_f$ y a c como vectores, es decir:

$$\bar{x}, \vec{a}_f, c \in V \quad (4)$$

Podemos hacerlo pues la $dim(V) \geq 2$ ya que estamos trabajando en $n \geq 3$.

Hagamos la intersección de las restricciones $\{r_i\}_{i \in \underline{m}}$ con V, $M' = M \cap V$ (estamos intersecando la región factible con V y ésto nos vuelve a dar un conjunto convexo y acotado M') , es decir:

$$\forall i \in \underline{m} \ \{< \vec{a'}_i, x > \leq z'_i\} = \{< \vec{a}_i, x > \leq z_i\} \cap V \quad (2)$$

Además $M' \neq \emptyset$, pues $\bar{x} \in M'$.

Lo que nos da un problema (P_{n-1}) $(Max : < c, x >; \quad S.a : \ x \in M')$ con solución el mismo punto $\bar{x} = \bar{x} \cap V$ (pues si era el máximo en M también lo será en $M \cap V$ que es un conjunto más pequeño y lo contiene.) y este es un problema que lo estamos tratando en dimensión $n-1$, aplicamos la hipótesis de inducción y nos da que la solución está en la frontera de la restricción que verifica $(*)$ $\delta r_{f'}$ para el problema (P_{n-1}), $\{< \vec{a'}_{f'}, x >= z'_{f'}\}$ (1).

Sea f verificando $(*)$ para (P_n). Como el gradiente de r_f es $\vec{a}_f$ y está en V (por (4)) y por verificar $(*)$ es el máximo, entonces también es el máximo en un conjunto más pequeño como es $M' = M \cap V$. Luego $f = f'$ (3).

Pero por construcción de las restricciones de problema (P_{n-1}) tenemos que:

$$\bar{x} \overbrace{\in}^{(1)} \{< \vec{a'}_{f'}, x >= z'_{f'}\} \overbrace{=}^{(2)} \{< \vec{a}_{f'}, x >= z_{f'}\} \cap V \overbrace{=}^{(3)} \{< \vec{a}_f, x >= z_f\} \cap V \overbrace{=}^{(4)} \{< \vec{a}_f, x >= z_f\} \equiv \delta r_f$$

luego $\bar{x} \in \{< \vec{a}_f, x >= z_f\} \equiv \delta r_f$.

■ **c.q.d.**

Corolario 1.2.1 *(LAEF). Si* $c = \lambda \vec{a}_f$ *con* $\lambda > 0$*, entonces* $S = \delta r_f \cap M$*.*

Demostración:

Para resolver el problema lineal (P_n) hay que aplicar el Teorema de LAEF sucesivamente. Cuando proyectamos c sobre δr_f, es decir, sobre $< \vec{a}_f, x >= z_f$ que verifica $(*)$ del Teorema de LAEF como $c = \lambda \vec{a}_f$, entonces el problema (P_{n-1}) queda: $Max : < 0, x >$; $S.a : \ x \in M' \subset r_f$, y la solución S a este problema es todo el conjunto M', que en este caso es $\delta r_f \cap M$.

■ **c.q.d.**

Observación 1.2.1 *(LAEF). Cuando M no es acotado el Teorema de LAEF sigue siendo cierto pero S en lugar de ser un conjunto de puntos óptimos, también puede ser un conjunto de direcciones ilimitadas, es decir, algunas de las direcciones de la restricción r_f puede ser dirección de ilimitación extrema. Sea como fuere la solución del problema hay que buscarla en r_f que verifica* $(*)$.

Observación 1.2.2 *(LAEF). M no es acotado cuando existen dos restricciones útiles adyacentes que tienen ángulo mayor o igual que* 180^0.

Capítulo 2

Algoritmo de LAEF para punto óptimo en $\mathbb{R}^n$.

2.1 Algoritmo de LAEF para punto óptimo en $\mathbb{R}^n$.

La aplicación del Teorema de LAEF más inmediata es el:

Algoritmo de LAEF para punto óptimo en $\mathbb{R}^n$

Dado el problema tipo (P_n):

$$\begin{cases} Max < c, x > \\ S.a: \quad x \in M \end{cases}$$

Donde M es un conjunto convexo de m restricciones del tipo $\{r_i\}_{i \in \underline{m}} \equiv Ax \leq z$. Donde $c \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^m$ y $A \in \mathcal{M}_{mxn}$ y con el conjunto factible M acotado.

Paso 1: Hallar la tabla:

Restricciones	Gradiente
$\{r_i\}_{i \in \underline{m}}$	$\{\vec{a}_i \equiv (a_i^1, a_i^2, \ldots, a_i^n)\}_{i \in \underline{m}}$

Paso 2: $w = n$; $V_w = \mathbb{R}^n$; $m_n = \underline{m}$.

Paso 3:

Si $m_n = \emptyset$ entonces $M = \emptyset$ o no acotado, **PARAR.**

Si $m_w = \emptyset$ entonces $w = w + 1$, $m_w = m_w - \{f_w\}$, r_{f_w} es inútil en V_w, ir a **Paso 3:**.

$$f_w \ tal \ que \ \frac{< c, \vec{a}_f > |_{V_w}}{\|\vec{a}_f\|} = Max \left\{ \frac{< c, \vec{a}_j > |_{V_w}}{\|\vec{a}_j\|} : \vec{a}_j \in Gradiente, \ j \in m_w \right\}$$

Consideramos f_w como escalar.

$m_{w-1} = m_w - \{f_w\}$

Paso 4:

Como el punto de mayor valor objetivo está contenido en esta (w-1)-variedad: $\{< \vec{a}_{f_w}, x >= z_{f_w}\} \equiv \delta r_{f_w}$, hacemos la proyección del vector costes a esta variedad $c' = P_V(c)$ y hacemos la intersección de

$\{< \vec{a}_{f_w}, x >= z_{f_w}\}$ con las demás restricciones, es decir, $\forall i \in m_w$ $r'_i = r_i \cap \{< \vec{a}_{f_w}, x >= z_{f_w}\}$, por tanto simplificamos el problema en una dimensión. El nuevo problema es:

$$\begin{cases} Max < c', x > \\ S.a: \;\; x \in M' \end{cases}$$

Donde M' es un conjunto de m' restricciones del tipo $\{r'_i\}_{i \in \underline{m'}} \equiv A'x \leq z'$. Donde $c' \in \mathbb{R}^{w-1}$, $x \in \mathbb{R}^{w-1}$, $z' \in \mathbb{R}^{m'}$ y $A' \in \mathcal{M}_{m'x(w-1)}$ y con el conjunto factible acotado.

(En realidad lo que estamos haciendo es despejar una variable con coeficiente no nulo de $< \vec{a}_{f_w}, x >= z_{f_w}$ y sustituirla en las demás restricciones y en la función objetivo).

Ahora nuestro espacio es $V_w = \{< \vec{a}_{f_w}, x >= z_{f_w}\} \cong \mathbb{R}^{w-1}$ y nuestra función objetivo es $< c', x >$.

Paso 5:

$w = w - 1$.

Si $w > 2$ entonces Ir al **Paso 3:**

Si $w = 2$ entonces aplicar el algoritmo de LAEF para punto óptimo en $\mathbb{R}^2$ con la siguiente modificación:

Donde pone: **Paso 3:** Si $m_f = \emptyset$ entonces $M = \emptyset$, **PARAR.**

Hay que poner: **Paso 3:** Si $m_f = \emptyset$ entonces, r_f es inútil en algún V, Hacer: $m_3 = m_3 - \{f_3\}$, $w = 3$, ir a **Paso 3.** (de AlgLAEFRn)

Y en el **Paso 7:** iii) hay que comprobar todas las restricciones de M de nuestro problema original (P_n).

2.2 Comentario

El algoritmo converge pues en cada iteración se disminuye una dimensión y en el peor de los casos hay que quitar m restricciones inútiles, como la dimensión del problema es n finito y el número de restricciones de m finito, en el peor de los casos cuando hayamos quitado todas las restricciones y hayamos disminuido hasta dimensión cero hemos hecho un número finito de pasos del orden de nm.

Este algoritmo tiene un tiempo computacional de $O(nm)$.

2.3 Ejemplos

2.3.1 Ejemplo

$$\begin{array}{lrl} Max: & -x_1 - x_2 + 4x_3 & \\ S.a: & x_1 + x_2 + 2x_3 & \leq 9 \\ & x_1 + x_2 - x_3 & \leq 2 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 & \leq 4 \\ & -x_1 & \leq 0 \\ & -x_2 & \leq 0 \\ & -x_3 & \leq 0 \end{array}$$

Paso 1:

$$\begin{array}{l} c = (-1,-1,4) \\ \vec{a}_1 = (1,1,2) \\ \vec{a}_2 = (1,1,-1) \\ \vec{a}_3 = (-1,1,1) \\ \vec{a}_4 = (-1,0,0) \\ \vec{a}_5 = (0,-1,0) \\ \vec{a}_6 = (0,0,-1) \end{array}$$

Paso 2: $w = 3,\ m_3 = \{1,2,3,4,5,6\}$

Paso 3: El conjunto es:

$$\{2.45,\ -3.46,\ 2.31,\ 1,\ 1,\ -4\}$$

El máximo es con $f_3 = 1$.

$m_2 = \{2,3,4,5,6\}$.

Paso 4: Despejamos x_3 de r_1:

$$x_3 = \frac{9 - x_1 - x_2}{2}$$

Sustituimos en las restricciones de m_2 y queda:

$$\begin{array}{lrl} Max: & 18 - 3x_1 - 3x_2 & \\ S.a: & 3x_1 + 3x_2 & \leq 13 \\ & -3x_1 + x_2 & \leq -1 \\ & -x_1 & \leq 0 \\ & -x_2 & \leq 0 \\ & x_1 + x_2 & \leq 9 \end{array}$$

Paso 5: w=2. Aplicar el Algoritmo de LAEF para $\mathbb{R}^2$.

Ver el ejemplo 3.3.1 : La solución es: $(x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 0, x_3 = \frac{13}{3})$.

2.3.2 Ejemplo

$$\begin{array}{lrl} Max: & -2x_1-3x_2-5x_3-2x_4-3x_5 & \\ S.a: & -x_1-x_2-2x_3-x_4-3x_5 & \leq -4 \\ & -2x_1-2x_2-3x_3-x_4-x_5 & \leq -3 \\ & -x_1 & \leq 0 \\ & -x_2 & \leq 0 \\ & -x_3 & \leq 0 \\ & -x_4 & \leq 0 \\ & -x_5 & \leq 0 \end{array}$$

Paso 1:

$$\begin{array}{l} c=(-2,-3,-5,-2,-3) \\ \vec{a}_1=(-1,-1,-2,-1,-3) \\ \vec{a}_2=(-2,-2,-3,-1,-1) \\ \vec{a}_3=(-1,0,0,0,0) \\ \vec{a}_4=(0,-1,0,0,0) \\ \vec{a}_5=(0,0,-1,0,0) \\ \vec{a}_6=(0,0,0,-1,0) \\ \vec{a}_7=(0,0,0,0,-1) \end{array}$$

Paso 2: $w=5,\ m_5=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

Paso 3: El conjunto es:

$$\{6.5, 6.88, 2, 3, 5, 2, 3\}$$

El máximo es con $f_5=2$.

$m_4=\{1,3,4,5,6,7\}$.

Paso 4: Despejamos x_4 de r_2:

$$x_4=3-2x_1-2x_2-3x_3-x_5$$

Sustituimos en las restricciones de m_4 y queda:

$$\begin{array}{lrl} Max: & -6+2x_1+x_2+x_3-x_5 & \\ S.a: & x_1+x_2+x_3-2x_5 & \leq -1 \\ & -x_1 & \leq 0 \\ & -x_2 & \leq 0 \\ & -x_3 & \leq 0 \\ & -2x_1-2x_2-3x_3-x_5 & \leq -3 \\ & -x_5 & \leq 0 \end{array}$$

Paso 5: w=4.

Paso 3: El Conjunto es: $\{2.267, -2, -1, -1, 0, 1\}$. Y el máximo es con $f_4=1$.

$m_3=\{3,4,5,6,7\}$.

Paso 4: Despejamos x_1 de r_1:

$$x_1=-1-x_2-x_3+2x_5$$

Sustituimos en las restricciones de m_3 y queda:

$$\begin{array}{lrl} Max: & -8-x_2-x_3+3x_5 & \\ S.a: & x_2+x_3-2x_5 & \leq -1 \\ & -x_2 & \leq 0 \\ & -x_3 & \leq 0 \\ & -x_3-5x_5 & \leq -5 \\ & -x_5 & \leq 0 \end{array}$$

Paso 5: w=3.

Paso 3: El Conjunto es: $\{-3.26, 1, 1, -2.74, 3\}$. Y el máximo es con $f_3 = 5$.

$m_2 = \{3, 4, 6, 7\}$.

Paso 4: Despejamos x_3 de r_5:

$$x_3 = 0$$

Sustituimos en las restricciones de m_2 y queda:

$$\begin{array}{lrl} Max: & -8 - x_2 + 3x_5 & \\ S.a: & x_2 - 2x_5 & \leq -1 \\ & -x_2 & \leq 0 \\ & -5x_5 & \leq -5 \\ & -x_5 & \leq 0 \end{array}$$

Paso5: w=2. Aplicar el Algoritmo de LAEF para $\mathbb{R}^2$.

Ver el ejemplo 3.3.2: La solución es: $(x_2 = 0, x_5 = 1, x_3 = 0, x_1 = 1, x_4 = 0)$.

Capítulo 3

Algoritmo de LAEF para punto óptimo en $\mathbb{R}^2$.

3.1 Algoritmo de LAEF para punto óptimo en $\mathbb{R}^2$.

Algoritmo de LAEF para punto óptimo en $\mathbb{R}^2$

Dado el problema tipo (P_2):

$$\begin{cases} Max: \; c_1x + c_2y \\ S.a: \; (x,y) \in M \end{cases}$$

Donde M es un conjunto de m restricciones del tipo $\{r_i\}_{i\in\underline{m}} \equiv Ax \leq z$ (z no necesariamente no negativo). Podemos hallar el conjunto de puntos óptimos del siguiente modo:

Paso 1: Hallar la tabla:

Restricciones	Gradiente
$\{r_i\}_{i\in\underline{m}}$	$\{\vec{a}_i \equiv (a_i, b_i)\}_{i\in\underline{m}}$

Paso 2: $m_f = \underline{m}$.

Paso 3:

Si $m_f = \emptyset$ entonces $M = \emptyset$, **PARAR.**

$$f \; tal \; que \; \frac{c_1a_f + c_2b_f}{\sqrt{a_f^2 + b_f^2}} = Max \left\{ \frac{c_1a_j + c_2b_j}{\sqrt{a_j^2 + b_j^2}} : (a_j, b_j) \in Gradiente, \; j \in \underline{m} \right\}$$

(f es un escalar).

Paso 4: $m_t = m_f - \{f\}$.

Paso 5:

$T = \emptyset$. (Tomamos T como conjunto).

$$T \; tal \; que \; \frac{c_1a_t + c_2b_t}{\sqrt{{a_t}^2 + {b_t}^2}} = Max \left\{ \frac{c_1a_j + c_2b_j}{\sqrt{a_j^2 + b_j^2}} : (a_j, b_j) \in Grad, \; y \; j \; / \; \begin{array}{c} j \in m_t, \\ \widehat{(\vec{a}_f, c)} + \widehat{(c, \vec{a}_j)} = \widehat{(\vec{a}_f, \vec{a}_j)} \end{array} \right\}$$

Paso 6: Si $T = \emptyset$ entonces r_f es una restricción inútil, hacemos $m_f = m_f - \{f\}$, ir a **Paso 3:**.

Sea $T_1 = T$.

Paso 7:

i) Sea $l \in T_1$:

Si $a_f b_l = a_l b_f$ entonces:

$\{$*Si* $T_1 = \{l\}$ *entonces* $m_t = m_t - T$, *ir a* **Paso 5:**, *si no*, *entonces* $T_1 = T_1 - \{l\}$, *ir a i*).$\}$

Si no, Hacer:

$$x = \frac{z_f b_l - z_l b_f}{a_f b_l - a_l b_f}$$

$$y = \frac{a_f z_l - a_l z_f}{a_f b_l - a_l b_f}$$

ii) $j = 1$

iii) Si $a_j x + b_j y \leq z_j$ entonces $j = j + 1$; Ir a iii).

iv) Si $j \leq m$ entonces (x, y) no es punto factible:

* Si hemos acabado con el conjunto T_1, es decir, $T_1 = \{l\}$; hacemos $m_t = m_t - T$, Ir a **Paso 5:**.

* Si $T_1 \neq \{l\}$ entonces tomamos otro $l \in T_1$, es decir, hacemos $T_1 = T_1 - \{l\}$ y vamos a i).

v) Si $j = m + 1$ entonces (x, y) es un punto factible, entonces (x, y) es solución, **PARAR.**.

3.2 Comentario

Esta aplicación tiene un tiempo computacional de $O(m)$.

3.3 Ejemplos

3.3.1 Ejemplo

$$\begin{array}{lrl} Max: & 18-3x_1-3x_2 & \\ S.a: & 3x_1+3x_2 & \leq 13 \\ & -3x_1+x_2 & \leq -1 \\ & x_1+x_2 & \leq 9 \\ & -x_1 & \leq 0 \\ & -x_2 & \leq 0 \end{array}$$

Paso 1:

$$\begin{array}{l} c=(-3,-3) \\ \vec{a}_1=(3,3) \\ \vec{a}_2=(-3,1) \\ \vec{a}_3=(1,1) \\ \vec{a}_4=(-1,0) \\ \vec{a}_5=(0,-1) \end{array}$$

Paso 2: $m_f=\{1,2,3,4,5\}$.

Paso 3: El conjunto es:

$$\{-4.2426, 1.89, -4.2426, 3, 3\}$$

$f=4$

Paso 4: $m_t=\{1,2,3,5\}$.

Paso 5: $T=\{5\}$.

Paso 6: $T_1=\{5\}$.

Paso 7: Hay punto $(0,0)$ pero es no factible, $m_t=\{1,2,3\}$

Paso 5: $T=\{1,3\}$

Paso 6: $T_1=\{1,3\}$.

Paso 7: i) $l=1$.

Hay punto, pero es no factible, $T_1=\{3\}$.

i) $l=3$.

Hay punto, pero es no factible, $m_t=\{2\}$

Paso 5: $T=\emptyset$

Paso 6: r_4 es inútil, $m_f=\{1,2,3,5\}$

Paso 3: $f=5$.

Paso 4: $m_t=\{1,2,3\}$

Paso 5: $T=\{2\}$.

Paso 6: $T_1=\{2\}$.

Paso 7: i) $l = 2$.

Hay punto $(\frac{1}{3}, 0)$ y es factible. Luego es la solución.

3.3.2 Ejemplo

$$\begin{array}{lrl} Max: & -8 - x_1 + 3x_2 & \\ S.a: & x_1 - 2x_2 & \leq -1 \\ & -x_1 & \leq 0 \\ & x_2 & \leq 1 \\ & -x_2 & \leq 0 \end{array}$$

Paso 1:

$$\begin{array}{l} c = (-1, 3) \\ \vec{a}_1 = (1, -2) \\ \vec{a}_2 = (-1, 0) \\ \vec{a}_3 = (0, 1) \\ \vec{a}_4 = (0, -1) \end{array}$$

Paso 2: $m_f = \{1, 2, 3, 4\}$.

Paso 3: El conjunto es:

$$\{-3.13, 1, 3, -3\}$$

$f = 3$

Paso 4: $m_t = \{1, 2, 4\}$.

Paso 5: $T = \{2\}$.

Paso 6: $T_1 = \{2\}$.

Paso 7: i) $l = 2$

Hay punto $(0, 1)$.

v) es factible. Luego es solución.

Capítulo 4

Algoritmo de LAEF para conjunto eficiente en $\mathbb{R}^2$.

4.1 Algoritmo de LAEF para conjunto eficiente en $\mathbb{R}^2$.

Algoritmo de LAEF para conjunto eficiente en $\mathbb{R}^2$

Dado el problema:

$$\begin{cases} Max: \ \{c_1x + c_1'y, \ c_2x + c_2'y\} \\ S.a: \ \ (x,y) \in M \end{cases}$$

Donde M es un conjunto de m restricciones del tipo $\{r_i\}_{i \in \underline{m}} \equiv Ax \leq z$ (z no necesariamente no negativo). Podemos hallar el conjunto de puntos eficientes del siguiente modo:

Paso 1: Hallar la tabla:

Restricciones	Gradiente
$\{r_i\}_{i \in \underline{m}}$	$\{\vec{a}_i \equiv (a_i, b_i)\}_{i \in \underline{m}}$

Paso 2: Hacer: $i = 1$; $j = 0$; $I = \emptyset$; $C_1 = \emptyset$; $C_2 = \emptyset$.

Paso 3: Si:

$$\frac{b_i c_1 - a_i c_1'}{c_2' c_1 - c_2 c_1'} \geq 0$$

y

$$\frac{a_i c_2' - b_i c_2}{c_2' c_1 - c_2 c_1'} \geq 0$$

entonces $I = I \cup \{i\}$, $I' = I$.

Paso 4: Si $i < m$ entonces $i = i + 1$; Ir a **Paso 3:**.

Paso 5: Si $I = \emptyset$ entonces **PARAR**, tomar unos costes, por ejemplo $(c_1, c_1{}')$, y aplicar el Algoritmo de LAEF para punto óptimo en $\mathbb{R}^2$.

Paso 6: Sea $i \in I$.

Paso 7: Sea: $m_f = \underline{m}$

Paso 8: Si $m_f = \{i\}$ entonces $I = I - \{i\}$, $\{r_i \cap M\} = \emptyset$, r_i es inútil, ir a **Paso 5:**.

$$f \; tal \; que \; \frac{a_i x_f + b_i y_f}{\sqrt{x_f^2 + y_f^2}} = Max \left\{ \frac{a_i x_j + b_i y_j}{\sqrt{x_j^2 + y_j^2}} : (x_j, y_j) \in Gradiente, \; j \in m_f, \; y \; j \neq i \right\}$$

Sea F el conjunto de los índices f de arriba.

Sea $F_1 = F$.

i) Sea $l \in F_1$:

Si $a_i b_l = a_l b_i$ entonces:

$\{Si \; F_1 = \{l\} \; entonces \; m_f = m_f - \{l\}, \; ir \; a$ **Paso 8:**, $si \; no, \; entonces \; F_1 = F_1 - \{l\}, \; ir \; a \; i).\}$

Si no, Hacer:

$$x = \frac{z_i b_l - z_l b_i}{a_i b_l - a_l b_i}$$
$$y = \frac{a_i z_l - a_l z_i}{a_i b_l - a_l b_i}$$

ii) $j = 1$

iii) Si $a_j x + b_j y \leq z_j$ entonces $j = j + 1$; Ir a iii).

iv) Si $j = m + 1$ entonces (x, y) es un punto factible, se toma $f = l$, Ir a **Paso 9:**.

v) Si $j \leq m$ entonces (x, y) no es punto factible:

* Si hemos acabado con el conjunto F_1, es decir, $F_1 = \{l\}$; hacemos $m_f = m_f - F$, Ir a **Paso 8:**.

* Si $F_1 \neq \{l\}$ entonces tomamos otro $l \in F_1$, es decir, hacemos $F_1 = F_1 - \{l\}$ y vamos a i).

Paso 9: Sea: $m_t = m_f$

Paso 10:

$$t \; tal \; que \; \frac{a_i x_t + b_i y_t}{\sqrt{{x_t}^2 + {y_t}^2}} =$$

$$Max \left\{ \frac{a_i x_j + b_i y_j}{\sqrt{x_j^2 + y_j^2}} : (x_j, y_j) \in Grad, \; y \; j \; / \; \begin{array}{l} j \in m_t, \\ f \neq j \neq i, \\ (\widehat{\vec{a}_f, \vec{a}_i}) + (\widehat{\vec{a}_i, \vec{a}_j}) = (\widehat{\vec{a}_f, \vec{a}_j}) \end{array} \right\}$$

Sea T el conjunto de los índices t de arriba.

Sea $T_1 = T$.

i) Sea $l \in T_1$:

Si $a_i b_l = a_l b_i$ entonces:

$\{Si \; T_1 = \{l\} \; entonces \; m_t = m_t - \{l\}, \; ir \; a$ **Paso 10:**, $si \; no, \; entonces \; T_1 = T_1 - \{l\}, \; ir \; a \; i).\}$

Si no, Hacer:

$$x = \frac{z_i b_l - z_l b_i}{a_i b_l - a_l b_i}$$
$$y = \frac{a_i z_l - a_l z_i}{a_i b_l - a_l b_i}$$

ii) $j = 1$

iii) Si $a_j x + b_j y \leq z_j$ entonces $j = j + 1$; Ir a iii).

iv) Si $j = m + 1$ entonces (x, y) es un punto factible, se toma $t = l$, Ir a **Paso 11:**.

v) Si $j \leq m$ entonces (x, y) no es punto factible:

* Si hemos acabado con el conjunto T_1, es decir, $T_1 = \{l\}$; hacemos $m_t = m_t - T$, Ir a **Paso 10:**.

* Si $T_1 \neq \{l\}$ entonces tomamos otro $l \in T_1$, es decir, hacemos $T_1 = T_1 - \{l\}$ y vamos a i).

Paso 11: Sean:

$$x = \frac{z_i b_f - z_f b_i}{a_i b_f - a_f b_i}$$
$$y = \frac{a_i z_f - a_f z_i}{a_i b_f - a_f b_i}$$
$$\hat{x} = \frac{z_i b_t - z_t b_i}{a_i b_t - a_t b_i}$$
$$\hat{y} = \frac{a_i z_t - a_t z_i}{a_i b_t - a_t b_i}$$
$$C_1 = C_1 \cup \{(x, y)\}$$

$$C_1 = C_1 \cup \{(\hat{x}, \hat{y})\}$$

$$C_2 = C_2 \cup \{\lambda(x, y) + (1 - \lambda)(\hat{x}, \hat{y})\}_{\forall \lambda \in [0,1]}$$

Paso 12: $I = I - \{i\}$, Si $I \neq \emptyset$, entonces ir a **Paso 6:**.

Paso 13: Sean:

$(\tilde{x}, \tilde{y}) \in C_1 \ / \ |c_1' x - c_1 y|$ sea mínima con $(x, y) \in C_1$.
$(\bar{x}, \bar{y}) \in C_1 \ / \ |c_2' x - c_2 y|$ sea mínima con $(x, y) \in C_1$.

Paso 14: PARAR.

Entonces:

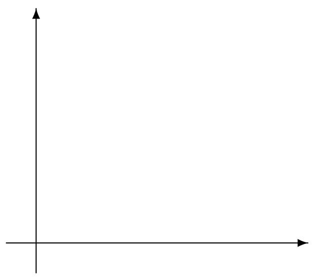
1. I' conjunto de restricciones con algún segmento en C_2.
2. C_1 es el conjunto de los puntos extremos eficientes.
3. C_2 es el conjunto de los puntos eficientes.
4. $(\tilde{x}, \tilde{y})$ es un punta de la poligonal de puntos eficientes (C_2), y $(\bar{x}, \bar{y})$ es la otra punta.

4.2 Ejemplo.

Ejemplo:

$$\left\{\begin{array}{rl} Max\{5x-2y,\ -x+4y\} & \\ S.a:\ -x+y & \leq 3 \\ x+y & \leq 8 \\ x & \leq 6 \\ y & \leq 4 \\ -x & \leq 0 \\ -y & \leq 0 \end{array}\right.$$

Gráficamente la región factible y las restricciones:



Paso 1: Hacemos la tabla:

Restricciones	Gradiente
r_1	$(-1,1)$
r_2	$(1,1)$
r_3	$(1,0)$
r_4	$(0,1)$
r_5	$(-1,0)$
r_6	$(0,-1)$

Paso 3: Otra tabla:

Restricciones	1 condición	2 condición	$\in I$?
r_1	>0	<0	$\notin I$
r_2	>0	>0	$\in I$
r_3	>0	>0	$\in I$
r_4	>0	>0	$\in I$
r_5	<0	<0	$\notin I$
r_6	<0	<0	$\notin I$

$$I=\{2,3,4\}$$

Paso 6: $i=2$.

Paso 8: De la r_2, $F=\{3,4\}$, tomamos el $f=3$, (los dos puntos son factibles, es decir, $r_i\cap r_3$ y $r_i\cap r_4$ son factibles, pero el 3 se toma antes).

Paso 10: $T = \{4\}$, y $r_i \cap r_4$ es factible.

Paso 11: $(x, y) = (6, 2)$, $(\hat{x}, \hat{y}) = (4, 4)$

Paso 12: $I = I - \{2\}$, entonces $I = \{3, 4\}$.

Paso 6: $i = 3$.

Paso 8: De la r_3, $F = \{2\}$, es factible, entonces $f = 2$.

Paso 10: $T = \{6\}$, y $r_i \cap r_6$ es factible, entonces $t = 6$.

Paso 11: $(x, y) = (6, 2)$, $(\hat{x}, \hat{y}) = (6, 0)$

Paso 12: $I = I - \{3\}$, entonces $I = \{4\}$.

Paso 6: $i = 4$.

Paso 8: De la r_4, $F = \{1, 2\}$ tomamos el $f = 1$, $r_i \cap r_1$ es factible.

Paso 10: $T = 2$, y $r_i \cap r_2$ es factible, entonces $t = 2$.

Paso 11: $(x, y) = (4, 4)$, $(\hat{x}, \hat{y}) = (1, 4)$

Paso 12: $I = I - \{4\}$, entonces $I = \emptyset$.

Paso 13: $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (6, 0)$, $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 4)$; que son los puntos de las puntas.

Paso 14: PARAR.

$I' = \{2, 3, 4\}$ son las restricciones activas.

El conjunto de puntos extremos eficientes es $C_1 = \{(6, 2), (4, 4), (6, 0), (1, 4)\}$.

El Conjunto de puntos eficientes es $C_2 = \{[(6, 2), (4, 4)], [(6, 2), (6, 0)], [(4, 4), (1, 4)]\}$.

$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (6, 0)$, $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 4)$ Son los puntos de las puntas de C_2.

4.3 Comentario.

Bondad del algoritmo.

La ventaja de este algoritmo es que no necesita aplicar el método del Simplex (muy lento) en singún caso y ni siquiera necesita dos puntos extremos eficientes iniciales como el método de NISE. De hecho un simple vistazo al algoritmo nos muestra que tiene un muy buen tiempo computacional $(0(m^2))$ donde m es el número de restricciones.

Aplicación.

Si en lugar de tener 2 funciones objetivos se tienen más, lo que hay que hacer es calcular los gradientes tales que una combinación convexa de ellos contenga a los otros gradientes, es decir, hay que calcular los gradientes frontera del ªbanico"convexo y utilizar estos dos como si fueran las únicas funciones objetivo del problema y aplicar el algoritmo.

Poner en el algoritmo de arriba el:
Paso 0:

Calcular los gradientes tales que una combinación convexa de ellos contenga a los otros gradientes.

****

Lázaro Antonio Escudero Ferrer.

E-mail: lazaro@tierradelazaro.com

URL: http://www.tierradelazaro.com

****